Séries entières

- Généralités, rayon de convergence (lemme d'Abel et conséquences)
- Calcul du rayon de convergence (par la définition, comparaison, critère de d'Alembert, rayon de la série dérivée)
- Opérations : somme et produit.
- Continuité de la somme (variable réelle ou complexe). Théorème d'Abel radial (si $\sum a_n R^n$ converge alors la somme est continue en R).
- Séries entières d'une variable réelle : dérivée, intégrale. Les rayons de convergence d'une série et de ses dérivées/primitives sont égaux. Conséquences sur les coefficients.
- Fonctions DSE en 0 : définition, fonctions de référence. Justification à l'aide de la formule de Taylor. Recherche de solutions d'équations différentielles développables en série entière en 0.
- Calcul de DSE en 0 : opérations (somme, produit, dérivation, intégration), cas des fractions rationnelles, utilisation d'une équation différentielle.
- Sommation des séries entières (cas où $a_n = P(n)$ ou $P(n)/n!$) - utilisation de dérivations/intégrations, d'équations différentielles.
- Exemples d'utilisations (calculs de somme de séries, série génératrice)

Semaine précédent : Réduction des endomorphismes et matrices

Questions de cours

1/ Définitions équivalentes du rayon de convergence (avec $a_n z^n$ de limite nulle, bornée et de série absolument convergente)

2/ Les rayons de convergence d'une série entière et de sa série dérivée sont identiques.

3/ Convergence simple, uniforme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Conséquence sur la continuité.

4/ Définition d'un développement en série entière en 0. Unicité des coefficients.

5/ Développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ à l'aide d'une équation différentielle.

6/ Liens entre les valeurs propres et les polynômes annulateurs, caractéristiques et minimaux.

7/ Lemme de décomposition des noyaux (démonstration pour 2, énoncé pour n)

8/ Caractérisation de la diagonalisabilité avec les polynômes annulateurs.

9/ Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables qui commutent. Montrer qu'ils sont diagonalisables dans une même base.