Réduction des endomorphismes et matrices

Polynômes d'endomorphismes :

- Polynômes annulateurs : polynôme minimal, description de $\mathbb{K}[u]$. Valeurs propres de $P(u)$, cas d'un polynôme annulateur. Liens valeurs propres et racines de polynômes (annulateur, caractéristique, minimal). Théorème de Cayley-Hamilton (démo faite mais non exigible).
- théorème de décomposition des noyaux
- lien avec la diagonalisation : u est diagonalisable ssi
  - ◇ il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples
  - ◇ le polynôme minimal est scindé à racines simples
  - ◇ le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} (X - \lambda)$ est annulateur.
- cas de la trigonalisation (existence d'un polynôme annulateur scindé).
- sous-espaces stables : si F est stable et u diagonalisable, alors l'endomorphisme induit est encore diagonalisable. Application : réduction simultanée de deux endomorphismes diagonalisables qui commutent.
- un endomorphisme est nilpotent si et seulement si il est trigonalisable et de spectre $\{0\}$.
- Lorsque u admet un polynôme annulateur scindé, décomposition de l'espace en somme de sous-espaces vectoriels sur lesquels u est la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent. Interprétation matricielle. Sous-espaces caractéristiques.

Revoir les théorèmes de la première partie de la réduction

Semaine dernière

- Révisions sur la dénombrabilité et les familles sommables
- Anneaux, idéaux, corps, arithmétique, polynômes

Questions de cours

1/ Polynôme minimal d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ où E est de dimension finie et description de $\mathbb{K}[u]$.

2/ Liens entre les valeurs propres et les polynômes annulateurs, caractéristiques et minimaux.

3/ Lemme de décomposition des noyaux (démonstration pour 2, énoncé pour n)

4/ Caractérisation de la diagonalisabilité avec les polynômes annulateurs.

5/ Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables qui commutent. Montrer qu'ils sont diagonalisables dans une même base.

6/ Éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.

7/ Définition du PGCD de deux polynômes. Polynômes premiers entre-eux et caractérisation par la relation de Bézout.

8/ lorsque $m \wedge n = 1$, isomorphisme d'anneaux entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$.

9/ $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ si $m \wedge n = 1$ (en admettant la question précédente) et détermination de $\varphi(n)$ si $n \geqslant 2$.