Espaces vectoriels normés

Topologie

- Ouverts et propriétés, points intérieurs, intérieur d'une partie.
- Fermés et propriétés, points adhérents, adhérence d'une partie, caractérisation par les suites, partie dense et frontière.
- Intérieur et adhérence d'un sous-espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.
- Compacts : suite extraite convergente dans l'ensemble. Produit fini de compacts. Une partie compacte est fermée et bornée et réciproque en dimension finie. Une partie d'un compact est compacte ssi elle est fermée. Une suite d'un compact ne possédant qu'une valeur d'adhérence ℓ converge vers ℓ.

Étude locale, continuité

- limites, continuité en un point, sur A. Propriétés algébriques, composition. Cas où l'espace d'arrivée est de dimension finie (applications composantes). Caractérisation par les suites, par les voisinages. Les applications coordonnées, les applications polynomiales en les coordonnées dans une base sont continues (exemples : déterminant, $A \mapsto A^2$, $M \mapsto \chi_M$).
- Image directe d'un compact, existence d'extrema pour une fonction à valeurs réelles.
- Continuité uniforme. Théorème de Heine.
- Ouverts et fermés relatifs à une partie A. Caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts/fermés.
- Exemples d'utilisation : montrer que des parties sont ouvertes/fermées. $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense + utilisation ($\chi_{AB} = \chi_{BA}$ par densité)
- Applications linéaires continues, norme subordonnée
- Les applications linéaires sur un espace de dimension finie sont lipschitziennes donc continues. Continuité des applications bilinéaires en dimension finie (inégalités du type $\|B(x,y)\| \leqslant K\|x\|\,\|y\|$). Cas des applications multilinéaires
- connexité par arcs, exemples, image par une fonction continue.

Généralisations

- Séries de vecteurs dans les evn de dimension finie, convergence absolue. Exponentielle dans une algèbre normée, inversion de $\mathbb{1} - a$ si $\|a\| < 1$. Formule $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ si A et B commutent admise.
- suites et séries de fonctions de $A \subset E \to F$, intégrales à paramètre avec paramètre dans $A \subset E \to \mathbb{K}$)

Questions de cours

1/ Point intérieur et intérieur d'une partie. $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

2/ Point adhérent (avec les boules), adhérence d'une partie. Caractérisation d'un point adhérent par les suites.

3/ Dans un compact une suite ne possédant qu'une valeur d'adhérence ℓ converge vers ℓ.

4/ Topologie des sous-espaces vectoriels : si F est un sous-espace vectoriel de E alors $\bar{F}$ aussi. Si F n'est pas d'intérieur vide alors $F = E$.

5/ Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E alors F est fermé.

6/ Caractérisations de la continuité d'une application linéaire.

7/ Définition de $|||f|||$. Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme.

8/ Définition de $\exp(A)$ (avec justification). Si $A = PBP^{-1}$ alors $\exp(A) = P.\exp(B).P^{-1}$.

9/ Continuité de $A \mapsto \exp(A)$ sur $M_n(\mathbb{K})$. La fonction $t \mapsto \exp(tA)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.