Suites et séries de fonctions

Pour l'instant, on ne s'intéresse qu'au cas des fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes.

- Différentes convergences pour les suites de fonctions : simple, uniforme, uniforme sur les segments.
- Continuité (en a, sur A), intégration sur un segment, suite des primitives s'annulant en a, dérivation et dérivée d'ordre k. Théorème de la double limite.
- Révisions : théorème de convergence dominée.
- Cas des séries de fonctions. Convergence normale. Adaptation des théorèmes sur les suites de fonctions.
- Intégration : cv uniforme sur un segment, théorème d'intégration terme à terme avec $\sum \int_I |f_n|$ convergente et théorème de convergence dominée sur la suite des sommes partielles.
- Techniques : recherche de limites au bord (cas de limites infinies), recherche d'équivalent.

Espaces vectoriels normés - Topologie

- Ouverts et propriétés, points intérieurs, intérieur d'une partie.
- Fermés et propriétés, points adhérents, adhérence d'une partie, caractérisation par les suites, partie dense et frontière.
- Intérieur et adhérence d'un sous-espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.
- Compacts : suite extraite convergente dans l'ensemble. Produit fini de compacts. Une partie compacte est fermée et bornée et réciproque en dimension finie. Une partie d'un compact est compacte ssi elle est fermée. Une suite d'un compact ne possédant qu'une valeur d'adhérence ℓ converge vers ℓ.

Questions de cours

1/ Point intérieur et intérieur d'une partie. $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

2/ Point adhérent (avec les boules), adhérence d'une partie. Caractérisation d'un point adhérent par les suites.

3/ Définition d'un compact et propriétés : ils sont fermés, bornés et une partie d'un compact l'est encore si et seulement si elle est fermée.

4/ Dans un compact une suite ne possédant qu'une valeur d'adhérence ℓ converge vers ℓ.

5/ Topologie des sous-espaces vectoriels : si F est un sous-espace vectoriel de E alors $\bar{F}$ aussi. Si F n'est pas d'intérieur vide alors $F = E$.

6/ Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E alors F est fermé.

7/ Différents types de convergences pour les séries de fonctions. Liens entre ces convergences (avec démonstration).

8/ Étude sommaire de la fonction ζ (définition, classe $\mathscr{C}^1$, limite en $+\infty$ et éventuellement équivalent en 1).

9/ Étude de la fonction ζ alternée $\theta : s \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$: continuité et dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^*$.