Révisions sur les déterminants

Quelques rappels rapides sur les déterminants. Méthodes de calculs, déterminant par blocs, développements, déterminant de Vandermonde. Comatrice. Relation $A.{}^t\mathrm{Com}(A) = {}^t\mathrm{Com}(A).A = \det(A)I_n$.

Réduction des endomorphismes

1/ Sous-espaces stables : propriétés (si u et v commutent alors $\ker u$ et Im u, $E_\lambda(u)$ stables par v, endomorphisme induit. Caractérisation matricielle (stabilité d'un sev, d'une famille de sev, cas des matrices triangulaires supérieures).

2/ Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice :
- Éléments propres. Propriétés sous-espaces propres : stables, endomorphisme induit, somme directe des sous-espaces propres.
- Cas des matrices. Cas de la transposée, $\dim E_\lambda(A) = \dim E_{\bar{\lambda}}(A)$ si $A \in M_n(\mathbb{R})$.
- Polynôme caractéristique, écriture, ordre de multiplicité d'une valeur propre. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit sur un sev stable. Inégalité $1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant n_\lambda$.

3/ Réduction en dimension finie :
- f est diagonalisable lorsqu'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Propriétés équivalentes (E est somme des espaces propres, base de vecteurs propres, somme des dimensions des espaces propres). Cas des matrices.
- CNS : polynôme caractéristique scindé et $\dim E_\lambda = n_\lambda$. Cas particuliers (cas χ_f scindé à racines simples, cas d'une seule racine). Admis : une matrice symétrique réelle est diagonalisable.
- quelques idées simples sur les polynômes annulateurs : si $P(f) = 0$ alors les valeurs propres de f sont des racines de P.
- Applications et exemples (et compléments) : puissances de A (avec réduction et avec polynôme annulateur), commutant d'un endomorphisme diagonalisable, étude des matrices compagnons (polynôme caractéristique, diagonalisabilité)
- Trigonalisation : définition. L'endomorphisme (ou la matrice) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. Exemple de trigonalisation sur une matrice de taille 3.

Suites de fonctions

Pour l'instant, on ne s'intéresse qu'au cas des fonctions définies sur $X \subset \mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes.
- Différentes convergences : simple, uniforme, uniforme sur les segments.
- Continuité (en a, sur X), intégration sur un segment, suite des primitives s'annulant en a, dérivation.

Questions de cours

1/ Déterminant de Vandermonde.

2/ Définition, écriture et propriétés du polynôme caractéristique.

3/ Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit. La dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à la multiplicité de la racine dans le polynôme caractéristique.

4/ Définitions équivalentes de « f est diagonalisable »(et démonstration).

5/ CNS de diagonalisabilité par le polynôme caractéristique.

6/ f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

7/ Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continue en a.

8/ Convergence uniforme sur les segments de la suite des primitives s'annulant en a d'une suite de fonctions continues qui converge uniformément sur les segments.