Les compléments sont des exemples/exercices importants qu'on a vu mais hors programme.

Révisions sur les déterminants

Quelques rappels rapides sur les déterminants (famille de vecteurs, endomorphismes, matrices). Méthodes de calculs, déterminant par blocs, développements, déterminant de Vandermonde. Comatrice. Relation $A.{}^t\text{Com}(A) = {}^t\text{Com}(A).A = \det(A)I_n$.

Réduction des endomorphismes

1/ Sous-espaces stables : propriétés (si u et v commutent alors $\ker u$ et Im u, $E_\lambda(u)$ stables par v, endomorphisme induit. Caractérisation matricielle (stabilité d'un sev, d'une famille de sev, cas des matrices triangulaires supérieures).

2/ Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice :
- Éléments propres. Propriétés sous-espaces propres : stables, endomorphisme induit, somme directe des sous-espaces propres.
- Cas des matrices. Cas de la transposée, $\dim E_\lambda(A) = \dim E_{\bar{\lambda}}(A)$ si $A \in M_n(\mathbb{R})$.
- Polynôme caractéristique, écriture, ordre de multiplicité d'une valeur propre. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit sur un sev stable. Inégalité $1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant n_\lambda$.

3/ Réduction en dimension finie :
- f est diagonalisable lorsqu'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Propriétés équivalentes (E est somme des espaces propres, base de vecteurs propres, somme des dimensions des espaces propres). Cas des matrices.
- CNS : polynôme caractéristique scindé et $\dim E_\lambda = n_\lambda$. Cas particuliers (cas χ_f scindé à racines simples, cas d'une seule racine). Admis : une matrice symétrique réelle est diagonalisable.
- quelques éléments simples sur les polynômes annulateurs : si $P(f) = 0$ alors les valeurs propres de f sont des racines de P.

Pas encore fait : applications de la réduction et trigonalisation.

Semaines précédentes : séries numériques

Séries numériques

- définitions, propriétés générales, séries télescopiques, lien suites-séries.
- Séries à termes positifs : critères de comparaison, séries géométriques, séries de Riemann, règles de Riemann. Séries de Bertrand (hors programme). Comparaison à une série géométrique, règle de d'Alembert. Comparaison série-intégrale. Diverses utilisations pour trouver des encadrements/équivalents de restes/sommes partielles.
- Sommation des relations de comparaison (o, O, ~ entre deux séries dont la seconde est à termes positifs) pour les sommes partielles/restes. Utilisations pour déterminer des dév. asymptotiques de suites.
- Séries quelconques : absolue convergence, théorème des séries alternées (avec majoration et signe du reste). Développement asymptotique du terme général. Produit de Cauchy et exponentielle complexe.

Questions de cours

1/ Déterminant de Vandermonde.

2/ Définition, écriture et propriétés du polynôme caractéristique.

3/ Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit. La dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à la multiplicité de la racine dans le polynôme caractéristique.

4/ Définitions équivalentes de « f est diagonalisable »(et démonstration).

5/ CNS de diagonalisabilité par le polynôme caractéristique.

6/ Comparaison à une série géométrique et règle de d'Alembert.

7/ Démonstration de $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

8/ Démonstration de la sommation des o : cas d'une comparaison à une série convergente.

9/ Démonstration de la sommation des o : cas d'une comparaison à une série divergente.

10/ Théorème des séries alternées. Majoration et signe du reste.