Les compléments sont des exemples/exercices importants qu'on a vu mais hors programme.

Révisions et compléments sur les matrices

- Révisions générales sur les opérations, base canonique, produits $E_{ij}E_{kl}$, trace....
- Lien avec l'algèbre linéaire, matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, changement de bases.
- Matrices équivalentes (et caractérisation par le rang, équivalence à J_r), matrices semblables. Méthodes pour montrer que des matrices sont semblables / pour déterminer une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme à une certaines formes.
- Opérations par blocs (combinaisons linéaires, produit, rang, déterminant), interprétation de la stabilité
- Matrices d'opérations élémentaires et applications.

Remarque : quelques rappels rapides/exemples sur les déterminants mais pas encore beaucoup de calculs

Semaine précédente : Révisions d'algèbre linéaire

- Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels : opérations, espace engendré par une partie A. Sommes et sommes directes de 2 et plusieurs sous-espaces, espaces supplémentaires
- Familles libres, génératrices, liées - techniques d'indépendance linéaire. Cas particuliers : familles de polynômes de degré deux à deux distincts. Bases.
- Espaces de dimension finie. Théorèmes de la base incomplète. Dimension de sommes, sommes directes, $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe si et seulement si $\dim \sum_{i=1}^{p} E_i = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$. Base adaptée à une décomposition.
- Applications linéaires. Images directes et réciproques de sev. Image et noyau. Image de familles par des applications linéaires. Application linéaire définie par ses restrictions sur des sev supplémentaires.
- Tout supplémentaire du noyau est isomorphe à l'image et formule du rang.
- Projecteurs et projections. Symétries.
- Propriétés du rang, rang d'une composée, invariance par composition par un automorphisme.
- Hyperplans et formes linéaires, interpolation de Lagrange.
- *Compléments* : propriétés sur la suite $\ker f^k$ (strictement croissante puis constante), si $f(x)$ est colinéaire à x pour tout x alors f est une homothétie, centre de $\mathscr{L}(E)$, théorèmes de factorisation (avec les images et avec les noyaux), $\dim\ker(g\circ f) \leqslant \dim\ker f + \dim\ker g$.

Questions de cours

1/ isomorphisme du rang, formule du rang.

2/ Démonstration de $\dim\ker(g\circ f) \leqslant \dim\ker f + \dim\ker g$.

3/ Polynômes d'interpolation de Lagrange : $x_1, \dots, x_n$ deux à deux distincts - existence d'un unique polynôme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$. Expression de ce polynôme.

4/ H est un hyperplan de E si et seulement si il existe $\varphi \in E^*$ non nulle telle que $H = \ker\varphi$. Deux équations de H sont proportionnelles.

5/ Propriétés de la trace (linéarité, produit, matrices semblables)

6/ Changement de bases : matrice de passage, démonstration de $X = PX'$ et de $B = Q^{-1}AP$.

7/ Toute matrice de rang r est équivalente à J_r. Application : rang de $\begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & B \end{pmatrix}$.

8/ Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle.