

Théorème de convergence dominée et applications

- Théorème de convergence dominée (pas de démonstration) - diverses utilisations (cas d'un intervalle mobile, recherche d'équivalents de suites d'intégrales).
- Intégrale dépendant d'un paramètre : étude de fonctions $x \mapsto \int_I h(x, t) dt$: théorèmes de continuité, classe \mathcal{C}^1 et \mathcal{C}^k (domination sur la dernière dérivée).

Semaine précédente : intégration sur un intervalle

La présentation et la plupart des démonstrations ont été faites sur un intervalle $[a, +\infty[$ puis étendu rapidement aux autres intervalles.

- Intégrales convergentes d'une fonction continue par morceaux (sur les différents types d'intervalles). Propriétés (linéarité, positivité, caractère défini, relation de Chasles)
- Intégrales absolument convergentes, intégrabilité d'une fonction.
- Critères de comparaison, fonctions de référence (fonctions $x \mapsto 1/x^\alpha$ et exponentielles). Les intégrales de Bertrand ont été traitées mais hors.prog : elles peuvent être utilisées mais il faut savoir redémontrer les différents cas. Règles de Riemann $x^\alpha f(x)$ (en dernier recours - à reformuler avec les critères de comparaison)
- Liens divers entre intégrabilité, convergence et limite.
- Changement de variable pour les intégrales convergentes, pour les fonctions intégrables (et intégration par parties). Cas de la translation.
- Intégrales semi-convergentes : exemple de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}$ (convergence et non-intégrabilité). Étude plus générale de $t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$. Méthode par développement asymptotique.

Questions de cours

- 1/ Lien entre convergence et convergence absolue (et démonstration)
- 2/ Intégrabilité (ou non) de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$ sur $[2, +\infty[$.
- 3/ Étude de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}$: convergence et non absolue convergence.
- 4/ Montrer que, si $x > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$
- 5/ Théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.
- 6/ Théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre.
- 7/ Étude de la fonction Γ (définition, continuité, dérivée, relation fonctionnelle)