

Espaces vectoriels normés : normes et suites

- Rappels sur les bornes supérieures et inférieures (manipulations, techniques pour les déterminer)
- Définitions et propriétés des normes (exemples sur \mathbb{K}^n , $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$, sur $\mathbb{K}[X]$ et $M_n(\mathbb{K})$).
- Norme induite, norme sur un produit d'espaces vectoriels, norme associée à un produit scalaire.
- Distance associée à une norme, distance à une partie (elle est 1-lipschitzienne).
- Boules ouvertes et fermées, parties bornées.
- Normes équivalentes. En dimension finie les normes sont équivalentes (admis pour le moment).
- Convergence et divergence des suites, propriétés des limites. Limites par coordonnées en dimension finie.
- Lien normes équivalentes et convergence des suites.
- Suites extraites et valeurs d'adhérences.
- Rappels sur les suites de réels (propriétés liées à la relation d'ordre). Suites définies par une relation de récurrence, exemples de suites définies implicitement.

Révisions - Intégration sur un segment

- Fonctions continues par morceaux. Propriétés de l'intégrale sur un segment (la construction n'a pas été refaite), formule de Cauchy-Schwarz (et cas d'égalité).
- Sommes de Riemann (subdivision régulière avec points au bord ou avec un point à l'intérieur).
- Primitives d'une fonction continue sur un intervalle, théorème d'existence. Utilisation pour l'étude d'intégrales dépendantes de leurs bornes. Quelques extensions aux fonctions continues par morceaux.
- Calcul des intégrales : IPP et formule de changement de variable sous la forme

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(u) \varphi'(u) du$$

avec φ de classe \mathcal{C}^1 sur $[\alpha, \beta]$ et f continue sur un intervalle contenant $\varphi([\alpha, \beta])$ - écriture lorsque φ est bijective.

- Formule de Taylor avec reste intégral.
- quelques méthodes usuelles : fractions rationnelles simples, polynômes et fractions en sin et cos (seulement $\tan(t/2)$ au programme mais on peut utiliser d'autres règles), polynôme-exponentielle, fractions $F(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$.
- Approximation uniforme (à ε) d'une fonction continue par morceaux sur un segment par une fonction en escalier. Exemple d'utilisation : lemme de Lebesgue cas \mathcal{C}^1 puis cas continue par morceaux.

Questions de cours

- 1/ Définition d'une norme. Montrer que la norme associée à un produit scalaire est bien une norme.
- 2/ Distance à une partie non vide. Montrer que $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$
- 3/ Normes 1, 2 et ∞ sur $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Comparaison de ces normes.
- 4/ La norme N_2 est dominée par N_1 si et seulement si toute suite de limite nulle pour N_1 est une suite de limite nulle pour N_2 .
- 5/ Limite de $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ dans le cas où la fonction est continue sur $[0, 1]$
- 6/ Théorème fondamental : si f est continue sur I , alors $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a (avec $a \in I$) - se limiter à un point intérieur à I .
- 7/ Formules d'intégration par parties et de changement de variable.
- 8/ Formule de Taylor avec reste intégral. Application : écriture de $\sin x$ sous forme de somme d'une série.